Zeszyty Naukowe Towarzystwa Doktorantów UJ
Nauki Ścisłe, Nr 16 (1/2018), s. 169–182
e-ISSN 2082-3827 | p-ISSN 2084-977X
www.doktoranci.uj.edu.pl/zeszyty/nauki-scisle
DOI: 10.12797/ZNTDSc.09.2018.16.02

Michał Białończyk

Uniwersytet Jagielloński
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej
e-mail: mbialoncz@gmail.com

data nadesłania tekstu do redakcji: 9.11.2017
data pozytywnej recenzji: 13.04.2018

Oszacowanie drugiej wartości własnej odwzorowania kwantowego

Streszczenie

W teorii informacji kwantowej dyskretna ewolucja otwartego układu kwantowego jest opisywana tzw. kanałem kwantowym – w przestrzeni skończenie wymiarowej kanał taki jest opisywany macierzą, której promień spektralny wynosi 1 i która posiada punkt stały. Jeżeli wartość własna jest niezdegenerowana, to każdy stan po wielokrotnym zastosowaniu kanału do niego zbiega – szybkość zbieżności jest określona przez wartość własną λ_2 o największym module mniejszym od 1. W artykule dowodzimy oszacowania na tę wartość własną, korzystając z twierdzenia Brauera znanego z teorii macierzy.

Słowa kluczowe

odwzorowanie kwantowe, macierz gęstości, asymptotyczna ewolucja układu kwantowego

Wprowadzenie

Oznaczamy przez $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ zbiór macierzy zespolonych $n \times n$. Stosując notację Diraca, używaną powszechnie w teorii informacji kwantowej, wektor przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ reprezentujemy jako „ket" i oznaczamy $|\psi\rangle$, zaś wektor przestrzeni dualnej „bra" oznaczamy $\langle\psi|$. Iloczyn skalarny wektorów $|\psi\rangle$ i $|\phi\rangle$ oznaczamy $\langle\psi|\phi\rangle$. W zbiorze $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ wyróżniamy zbiór macierzy *dodatnio półokreślonych* oznaczany jako $\mathcal{M}_n^+(\mathbb{C})$:

$$A \in \mathcal{M}_n^+(\mathbb{C}) \Leftrightarrow A \geq 0 \ \Leftrightarrow \forall_{|\psi\rangle \in \mathbb{C}^n} \langle\psi| A |\psi\rangle \geq 0. \tag{1}$$

Jeżeli $A \geq 0$ oraz ker $A = \{0\}$ to piszemy $A > 0$. *Stany mieszane* układu kwantowego opisywane są przez *macierze gęstości*, tzn. macierze dodatnio półokreślone i o śladzie 1. Zbiór macierzy gęstości $n \times n$ oznaczamy $\mathcal{M}_n^{+,1}(\mathbb{C})$:

$$\mathcal{M}_n^{+,1}(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : A \geq 0, \mathrm{Tr}\, A = 1\}. \tag{2}$$

Aby modelować układ fizyczny, musimy wiedzieć, jak jego stan opisywany macierzą gęstości ewoluuje w czasie. Najprostszą ewolucją jest ewolucja dyskretna, tzn. zachodząca na pewnym skończonym odcinku czasowym. Jeżeli układ jest *zamknięty*, tzn. nie oddziałuje z otoczeniem, to ewolucja jest *unitarna*:

$$\rho \to U\rho U^\dagger, \tag{3}$$

gdzie $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$. Ewolucje unitarne wystarczają na przykład do opisu bramek kwantowych. Natomiast jeżeli układ jest otwarty, to w ogólności:

$$\rho \to \Phi(\rho), \tag{4}$$

gdzie $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}(\mathbb{C})$ jest odwzorowaniem liniowym. Aby Φ opisywało prawidłową ewolucję, musi spełniać dodatkowe warunki. Po pierwsze, musi być *dodatnie*, tzn.

$$A \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(A) \geq 0 \tag{5}$$

dla każdej macierzy $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ponadto powinno *zachowywać ślad* (*trace preserving*), tzn.

$$\mathrm{Tr}\, \Phi(A) = \mathrm{Tr} A. \tag{6}$$

Okazuje się, że te warunki nie są jednak wystarczające, żeby modelować ewolucję układu kwantowego – należy dodać również warunek mówiący, iż rozszerzenie odwzorowania na inny system kwantowy jest dodatnie. Precyzyjne sformułowanie tego pojęcia zawiera definicja:

Definicja 1. *Odwzorowanie* $\Phi: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *nazywamy* całkowicie dodatnim *(w skrócie CP), jeżeli dla każdego* $k \geq 0$ *odwzorowanie* $\mathbb{1} \otimes \Phi: \mathcal{M}_k(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_k(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *jest dodatnie.*

Odwzorowanie $\mathbb{1} \otimes \Phi$ określamy standardowo: $(\mathbb{1} \otimes \Phi)(A \otimes B) = A \otimes \Phi(B)$, a cały iloczyn tensorowy rozszerzamy, korzystając z liniowości odwzorowania.

Następna definicja formalizuje pojęcie prawidłowej ewolucji kwantowego układu otwartego:

Definicja 2. *Odwzorowanie Φ nazywamy* operacją kwantową *(*kanałem kwantowym*), jeżeli Φ jest całkowicie dodatnie i zachowuje ślad (w skrócie CPTP). Zbiór wszystkich operacji kwantowych określonych na $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ oznaczamy $\mathcal{CP}^n$.*

Bardzo ważną charakteryzację odwzorowań całkowicie dodatnich sformułowali M. D. Choi i A. Jamiołkowski[1].

Twierdzenie 1. *Niech Φ: $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ będzie odwzorowaniem liniowym. Określmy $D(\Phi) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ następująco:*

$$D(\Phi) = [\Phi \otimes \mathbb{1}]|\phi^+\rangle\langle\phi^+|, \tag{7}$$

gdzie $|\phi^+\rangle \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ jest stanem maksymalnie splątanym, zdefiniowanym jako:

$$|\phi^+\rangle = \sum_{i=1}^n |ii\rangle. \tag{8}$$

Wówczas zachodzi

$$\Phi \textit{ całkowicie dodatnie} \Leftrightarrow D(\Phi) \geq 0.$$

Twierdzenie to ma bardzo ważne konsekwencje, które zaobserwujemy, przechodząc do reprezentacji macierzy. Wprowadzamy standardową bazę w $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, gdzie górne indeksy numerują wektory bazy, dolne zaś elementy macierzy:

$$\{E^{ij}\}_{i,j=1}^n : E_{kl}^{ij} = \delta_{ik}\delta_{jl}. \tag{9}$$

[1] M. D. Choi, *Completely Positive Linear Maps on Complex Matrices*, "Linear. Alg. Appl." 1975, No. 10, s. 285–290; A. Jamiołkowski, *Linear Transformations which Preserve Trace and Positive-semidefiniteness of Operators*, "Rep. Math. Phys." 1972, No. 5, s. 415.

Wówczas, traktując Φ i $D(\Phi)$ jako macierze $n^2 \times n^2$ w tej bazie, otrzymujemy[2]:

$$D(\Phi)_{\substack{mp\\nq}} = \Phi^R_{\substack{mp\\nq}} = \Phi_{\substack{mn\\pq}}, \tag{10}$$

gdzie R oznacza operację przetasowania elementów, a macierz $D(\Phi)_{\substack{mp\\nq}}$ nazywamy *macierzą dynamiczną*. Zatem jeżeli Φ jest całkowicie dodatnie, to z twierdzenia 1 możemy napisać rozkład spektralny $D(\Phi)$, uzyskując bardzo ważny wniosek[3]:

Wniosek 1. *Jeżeli odwzorowanie liniowe $\Phi: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ jest całkowicie dodatnie, to można je przedstawić w następującej postaci, zwanej* postacią normalną Krausa*:*

$$\begin{gathered}\Phi(\rho) = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}^2} A_i \rho A_i^\dagger = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}^2} d_i \chi_i^\dagger \rho \chi \,, \\ \mathrm{Tr}\left(\chi_i^\dagger \chi_j\right) = \delta_{ij}, d_1, \dots \mathrm{d}_{n^2} \geq 1.\end{gathered} \tag{11}$$

*Operatory $A_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nazywamy **operatorami Krausa**.*

Zauważmy, że w równaniu (11) liczby d_i są wartościami własnymi macierzy $D(\Phi)$. Dla całkowicie dodatniego odwzorowania Φ liczbę niezerowych wartości własnych macierzy $D(\Phi)$ będziemy nazywać *rzędem Krausa odwzorowania* Φ*.* Jeżeli rząd Krausa wynosi n^2, czyli wszystkie wartości własne macierzy dynamicznej są niezerowe, to mówimy, że Φ ma *pełny rząd Krausa*. W dalszej części artykułu będziemy się zajmować tylko kanałami kwantowymi o pełnym rzędzie Krausa.

Podstawowe własności spektralne i asymptotyczne kanałów kwantowych

Kanał kwantowy $\Phi: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ możemy reprezentować jako macierz $n^2 \times n^2$, możemy zatem mówić o jego spektrum spec(Φ), stanowiącym zbiór wartości własnych tej macierzy. Każdy kanał kwantowy ma punkt

[2] I. Bengtsson, K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States*, Cambridge University Press, Cambridge 2006.

[3] Ibidem.

stały (co można szybko zaobserwować, korzystając na przykład z tw. Schaudera o punkcie stałym – zbiór macierzy gęstości jest zwarty i wypukły, a kanał kwantowy przekształca macierze gęstości w macierze gęstości. Zatem $1 \in \mathrm{spec}(\Phi)$. Ponadto promień spektralny macierzy kanału kwantowego wynosi 1 oraz $\overline{\mathrm{spec}(\Phi)} = \mathrm{spec}(\Phi)$. Jeżeli dla kanału Φ wartość własna 1 jest niezdegenerowana oraz

$$\mathrm{spec}_p(\Phi) = \{\lambda \in \mathrm{spec}(\Phi) : |\lambda| = 1\} = \{1\}, \tag{12}$$

tzn. 1 jest jedyną wartością własną o module 1, to kanał Φ nazywamy *pierwotnym*. Każdy kanał o pełnym rzędzie Krausa jest kanałem pierwotnym, co wynika z następującego twierdzenia[4]:

Twierdzenie 2. *Niech* $\Phi: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *będzie kanałem kwantowym w postaci Krausa:*

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{K} A_i X A_i^{\dagger}. \tag{13}$$

Ponadto niech $S_m(A_1, \ldots, A_K)$ *oznacza powłokę liniową wszystkich możliwych iloczynów m-tek operatorów Krausa:*

$$S_m(A_1, \ldots, A_K) = \mathrm{span}\left\{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_m} : (i_1, \ldots i_m) \in \{1, \ldots K\}^m\right\} \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{C}). \tag{14}$$

Odwzorowanie Φ *jest pierwotne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje* $M \in \mathbb{N}$ *takie, że* $S_m(A_1, \ldots A_K) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Dla kanału pierwotnego określamy *drugą wartość własną* λ_2 jako wartość własną różną od 1, posiadającą największy moduł. Wykorzystując poprzednie wnioski, nietrudno zauważyć, że dla odwzorowania pierwotnego Φ i dla każdej macierzy gęstości $\sigma \in \mathcal{M}_n^{+,1}(\mathbb{C})$ zachodzi

$$\lim_{t\to\infty} \Phi^t(\sigma) = X, \tag{15}$$

gdzie X jest jedynym ściśle dodatnim punktem stałym Φ o śladzie równym 1.

[4] J. I. Cirac, D. Perez-Garcia, M. Sanz, M. M. Wolf, *A Quantum Version of Wielandt's Inequality*, "IEEE Trans. Inf. Theory" 2010, No. 56, s. 4668–4673.

Fizycznie oznacza to, że układ otwarty, którego ewolucja jest modelowana kanałem kwantowym Φ, dąży do jednoznacznego stanu równowagi *X*. O prawdziwości powyższego stwierdzenia można się przekonać, rozpatrując rozkład Jordana macierzy odwzorowania Φ – klatki Jordana odpowiadające wartościom własnym o module mniejszym od 1 znikają do 0, gdy bierzemy coraz większe potęgi Φ. O szybkości zbieżności w równaniu (15) decyduje wartość λ_2, stąd możliwość oszacowania jej wartości może się okazać przydatna w zastosowaniach.

W tym miejscu warto zaznaczyć, że rozpatrywane tu własności punktów stacjonarnych odwzorowań dodatnich są przedmiotem tzw. teorii Perrona-Frobeniusa, której podstawowa wersja dotyczy macierzy rzeczywistych o elementach nieujemnych[5]. Teoria ta została uogólniona dla przypadku odwzorowań kwantowych (tzw. *nieprzemienna wersja teorii Perrona-Frobeniusa*)[6]. W literaturze można znaleźć wiele prac, w których są omawiane liczne wnioski i konsekwencje nieprzemiennej teorii Perrona-Frobeniusa w zastosowaniu do teorii informacji kwantowej[7]. Rozpatrywane w niniejszym artykule odwzorowania pierwotne to szczególny przypadek szerszej klasy odwzorowań, mianowicie tzw. *odwzorowań nieredukowalnych* – dla takich odwzorowań również istnieje niezdegenerowany wektor własny do wartości własnej 1 – może on natomiast mieć inne wartości własne o module równym 1 i zdanie o zbieżności do punktu stałego *X* nie jest prawdziwe. Problem zbieżności do stanu równowagi jest przedmiotem badań w teorii klasycznych i kwantowych procesów Markova – obszerny opis aktualnych wyników w tej dziedzinie można znaleźć na przykład u Szehra et al.[8]

Narzędziem użytecznym w znajdowaniu oszacowań jest *twierdzenie Brauera*[9]. Dla kompletności zamieszczamy je wraz z dowodem:

---

[5] G. Frobenius, *Ueber Matrizen aus nicht negativen Elementen*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1912, s. 456–477.

[6] D. Evans, R. Høegh-Krohn, *Spectral Properties of Positive Maps On C*-algebras*, "J. London Math. Soc." 1978, No. 17, s. 345–355; M. Lagro, W-S. Yang, S. Xiong, *A Perron--Frobenius Type of Theorem for Quantum Operations*, "J. Stat. Phys." 2017, No. 169, s. 38–62.

[7] D. R. Farenick, *Irreducible Positive Linear Maps On Operator Algebras*, "Proc. AMS" 1996, No. 124, s. 3381; U. Groh, *The Peripheral Point Spectrum of Schwarz Operators On C*-algebras*, "Math. Z." 1981, No. 176, s. 311–318; M. Rahaman, *Multiplicative Properties of Quantum Channels*, arXiv:1701.06205, July 2017; M. Białończyk, A. Jamiołkowski, K. Życzkowski, *Spectral and Structural Properties of Quantum Maps and Algebra Generated by Their Kraus Operators*, arXiv 1711.02354.v1 [math-ph] 2017.

[8] O. Szehr, D. Reeb, M. M. Wolf, *Spectral Convergence Bounds for Classical and Quantum Markov Processes*, "Journal-ref: Comm. Math. Phys." 2015, No. 333, s. 565–595.

[9] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press 1985.

Twierdzenie 3. *Niech A będzie dowolną macierzą zespoloną $N \times N$ o wartościach własnych λ, $\lambda_2, \ldots \lambda_N$ oraz niech $A|r\rangle = \lambda\, |r\rangle$. Wtedy dla dowolnego wektora $|y\rangle \in \mathbb{C}^n$ macierz $A - |r\rangle\langle y|$ ma wartości własne $\lambda - \langle y|r\rangle, \lambda_2, \ldots \lambda_N$.*

Dowód. Niech $\xi = \frac{r}{\|r\|}$. Korzystając z twierdzenia o rozkładzie Schura[10], możemy tak wybrać wektory kolumnowe $r_2, \ldots r_N$, że $U = |\xi, r_2, \ldots r_N|$ jest macierzą unitarną oraz:

$$U^{\dagger} A U = \begin{bmatrix} \lambda & \star \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

gdzie A_1 jest macierzą trójkątną górną $(N-1) \times (N-1)$ z elementami diagonalnymi $\lambda_2, \ldots \lambda_N$. Ponadto otrzymujemy:

$$U^{\dagger} |r\rangle\langle y| U = \begin{bmatrix} \langle \xi | r \rangle \\ \langle r_2 | r \rangle \\ \vdots \\ \langle r_N | r \rangle \end{bmatrix} [\langle y|\xi\rangle \ \ \langle y|r_2\rangle \ \ \ldots \ \ \langle y|r_n\rangle] = \begin{bmatrix} \langle y|r\rangle & \star \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

gdyż $\langle r_2|r\rangle = \ldots = \langle r_N|r\rangle = 0$. Zatem:

$$U^{\dagger}(A - |r\rangle\langle y| U = \begin{bmatrix} \lambda - \langle y|r\rangle & \star \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Macierz po prawej stronie powyższej równości jest macierzą górną, zatem jej wartości własne to elementy diagonalne, czyli dokładnie $\lambda - \langle y|r\rangle$, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Zauważmy, że wykorzystując powyższe twierdzenie, jesteśmy w stanie, dobierając odpowiednio wektory $|y\rangle$, zmieniać wartość własną o największym module λ_{max} i szacować promień spektralny macierzy $A - \langle r|y\rangle$, gdzie $Ar = \lambda_{max}\, r$. Mamy zatem:

$$|\lambda_2(A)| \leq \rho(A - |r\rangle\langle y|), \tag{19}$$

gdzie tu i w dalszych rozważaniach $\rho(X)$ oznacza promień spektralny macierzy X. Oczywiście dokładność powyższego oszacowania zależy od tego,

[10] Ibidem.

jak wartość $|\lambda_{max} - \langle y|r\rangle|$ ma się w stosunku do $|\lambda_2|$. Jeżeli $|\lambda_{max} - \langle y|r\rangle| \leq |\lambda_2|$, to w miejsce nierówności (19) zachodzi równość i otrzymujemy dokładne wyrażenie na $|\lambda_2|$. Z zasady należy tak dobierać wektor $|y\rangle$, aby liczba $|\lambda_{max} - \langle y|r\rangle|$ była jak najmniejsza.

Oszacowanie λ_2 dla odwzorowania kwantowego o pełnym rzędzie Krausa

Główny wynik artykułu zawarty jest w udowodnionym poniżej Twierdzeniu 4. Dla odwzorowania całkowicie dodatniego (niekoniecznie zachowującego ślad) w postaci Krausa $\Phi(X) = \sum_{i=1}^{n^2} A_i X A_i^\dagger$ oznaczamy:

$$T(\Phi) = \sum_{i=1}^{n^2} A_i^\dagger A_i. \tag{20}$$

Macierz $T(\Phi)$ można otrzymać z macierzy dynamicznej poprzez operację *częściowego śladu* $\mathrm{Tr}_A(D(\Phi))$ w następujący sposób:

$$T(\Phi) = \mathrm{Tr}_A\big(D(\Phi)\big) \Leftrightarrow T(\Phi)_{n|q} = \sum_{m=1}^{n} D(\Phi)_{\substack{mn \\ mq}}. \tag{21}$$

Ponadto stosujemy notację $\rho(X)$ na oznaczenie promienia spektralnego macierzy X. Posługując się własnościami odwzorowania dualnego oraz odwzorowań dodatnich określonych na C^*-algebrach, można pokazać następujący rezultat[11], który będzie pomocny przy dowodzie twierdzenia:

Lemat 1. *Niech* $\Phi: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *będzie kanałem kwantowym o postaci Krausa:*

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{n^2} A_i X A_i^\dagger. \tag{22}$$

---

11 V. Paulsen, *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge 2002 (Wniosek 2.9).

Jeżeli $T(\Phi)$ jest określone jak w (20), to

$$\rho(\Phi) \leq \rho\big(T(\Phi)\big). \tag{23}$$

Twierdzenie 4. *Niech $\Phi: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ będzie odwzorowaniem całkowicie dodatnim o pełnym rzędzie Krausa:*

$$\begin{gathered}\Phi(\rho) = \sum_{i=1}^{n^2} A_i \rho A_i^\dagger = \sum_{i=1}^{n^2} d_i \chi_i \rho \chi_i^\dagger, \\ \mathrm{Tr}\big(\chi_i^\dagger \chi_j\big) = \delta_{ij}, \quad d_1, \dots\, d_{n^2} > 0.\end{gathered} \tag{24}$$

Wtedy z Twierdzenia 2 wynika, że Φ jest pierwotne, a zatem istnieje dokładnie jedna (z dokładnością do mnożenia przez liczby) macierz $X > 0$ taka, że $\Phi(X) = \rho(\Phi)X$. Jeżeli $T(\Phi)$ jest określone przez równość (20), to

$$|\lambda_2(\Phi)| \leq \rho(T(\Phi)) - \frac{\mathrm{Tr}X}{\rho(X)} \min d_i. \tag{25}$$

Dowód. Niech $\Phi_{\substack{mn\\pq}}$ będzie macierzą odwzorowania Φ w standardowej bazie przestrzeni macierzowej $\{E^{ij}\}_{i.j=1}^{n}$. Wybierzmy $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), Y \geq 0$ i zapiszmy X, Y jako wektory kolumnowe w standardowej bazie: $|X\rangle = \sum_{i,j} X_{ij} E^{ij}$, $|Y\rangle = \sum_{i,j} Y_{ij} E^{ij} \in \mathbb{C}^{n^2}$. Oznaczmy

$$\psi = \Phi - |X\rangle\langle Y|. \tag{26}$$

Wtedy z twierdzenia Brauera (nierówność (19)) otrzymujemy:

$$|\lambda_2(\Phi)| \leq \rho(\psi). \tag{27}$$

Potrzebujemy zatem oszacować promień spektralny odwzorowania ψ (które w ogólności nie musi być nawet dodatnie). Zapisując ψ w postaci macierzowej, otrzymamy:

$$\psi_{\substack{mn\\pq}} = \Phi_{\substack{mn\\pq}} - X_{mn} \bar{Y}_{pq}. \tag{28}$$

Obliczmy macierz dynamiczną odwzorowania ψ (patrz twierdzenie 1 i równanie (10)):

$$D(\psi)_{\substack{mn\\pq}} = \psi^R_{\substack{mn\\pq}} = D(\Phi)_{\substack{mn\\pq}} - X_{mp}\bar{Y}_{nq}. \tag{29}$$

Z powyższej postaci bezpośrednio wynika, że $D(\psi)$ jest hermitowskie (gdyż Y oraz X są hermitowskie), a ponadto $D(\psi)$ możemy zapisać w postaci:

$$D(\psi) = D(\Phi) - X \otimes \bar{Y}. \tag{30}$$

Aby móc zastosować lemat 1 do oszacowania promienia spektralnego, odwzorowanie ψ musi być całkowicie dodatnie. Z twierdzenia 1 wiemy, że ψ jest całkowicie dodatnie, gdy $D(\psi)$ jest macierzą dodatnią. Z równania (30) widzimy przykładowo, że $D(\psi)$ będzie dodatnia, gdy największa wartość własna $X \otimes \bar{Y}$ jest nie większa od najmniejszej wartości własnej $D(\Phi)$. Ale ponownie, wykorzystując własności macierzy dynamicznej, widzimy, iż najmniejszą wartość własną $D(\Phi)$ stanowi $\min d_i$. Przyjmijmy:

$$Y_{nq} = \frac{\min d_i}{\rho(X)}\delta_{nq}, \tag{31}$$

gdzie δ_{nq} jest deltą Kroneckera. Wówczas

$$\rho(X \otimes Y) = \frac{\min d_i}{\rho(X)}\rho(X \otimes \mathbb{I}_n) = \min d_i, \tag{32}$$

zatem ψ jest całkowicie dodatnie. Korzystając z wniosku 1, otrzymujemy:

$$T(\psi) = \mathrm{Tr}_A D(\psi) = T(\Phi) - \frac{\min d_i}{\rho(X)}\mathrm{Tr}_A(X \otimes \mathbb{I}_n) = T(\Phi) - \frac{\mathrm{Tr}X}{\rho(X)}\min d_i \mathbb{I}_n. \tag{33}$$

Z lematu 1 oraz nierówności (27) dostajemy:

$$|\lambda_2(\Phi)| \leq \rho\left(T(\Phi) - \frac{\mathrm{Tr}X}{\rho(X)}\min d_i \mathbb{I}_n\right). \tag{34}$$

Ponieważ jednak $T(\Phi)$ i $T(\psi)$ są macierzami dodatnio-półokreślonymi (patrz wniosek 1), mają wszystkie wartości własne nieujemne. Stąd otrzymujemy (25).

Wniosek 2. *Jeżeli* $\Phi\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *jest kanałem kwantowym danym w postaci*

$$\Phi(\rho) = \sum_{i=1}^{n^2} A_i \rho A_i^\dagger = \sum_{i=1}^{n^2} d_i \chi_i \rho \chi_i^\dagger, \quad \mathrm{Tr}\left(\chi_i^\dagger \chi_j\right) = \delta_{ij},$$
$$d_1, \dots d_{n^2} > 0, \quad \sum_{i=1}^{n^2} d_i = n. \tag{35}$$

to

$$|\lambda_2(\Phi)| \leq 1 - \min d_i. \tag{36}$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że w tezie Twierdzenia 4 mamy $T(\Phi) = \mathbb{1}$, a ponadto możemy wybrać X tak, że $\mathrm{Tr}X = 1$. Wówczas $\rho(X) \leq 1$ i otrzymamy (36).

Dyskusja i przykłady

Warto zauważyć, że dowód Twierdzenia 4 sprowadza się do szacowania promienia spektralnego operatora postaci:

$$\psi = \Phi - |X\rangle\langle Y|, \tag{37}$$

gdzie X jest stanem własnym Φ do wartości własnej 1, który można znaleźć przykładowo, rozwiązując układ równań liniowych. Promień spektralny można zaś szacować, obliczając normę operatora ψ. Zazwyczaj jednak w zastosowaniach mamy dane odwzorowanie kwantowe zapisane przy pomocy operatorów Krausa, które mogą być wyrażone za pomocą parametrów – wtedy zaletą udowodnionego twierdzenia jest możliwość szybkiego oszacowania $|\lambda_2|$ bez konieczności obliczania elementów macierzy odwzorowania ψ ani jego normy. Ponadto już w przypadku odwzorowania $\Phi\colon \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ obliczenie wprost wartości własnej λ_2 wiąże się w ogólnym przypadku z diagonalizacją macierzy 9×9, co w ogólnym wypadku jest trudne (i niewykonalne za pomocą zwartej formuły), jeżeli odwzorowanie dane jest za pomocą parametrów.

Należy również zaznaczyć, że moc oszacowania danego przez wzór (36) zmniejsza się wraz ze zwiększaniem liczby wymiarów n – w istocie prawa strona równości (36) jest nie mniejsza niż $1 - \frac{1}{n}$ z uwagi na warunek $\sum d_i^2 = n, d_i > 0$. To powoduje, że dla $n \to \infty$ nasze oszacowanie trywializuje się do $|\lambda_2| < 1$. Z drugiej strony rachunki numeryczne oraz rozważania analityczne[12] pokazują, że dla losowego kanału kwantowego zachodzi $|\lambda_2| \sim \sqrt{\frac{1}{n}}$.

Powyższe rozważania prowadzą do wniosku, że udowodnione oszacowanie jest najbardziej użyteczne dla małych wymiarów n.

Przykład 1. *Rozważmy tzw.* kanał Paullego*, czyli odwzorowanie jedno-kubitowe* $\Phi: \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *określone następująco:*

$$\Phi(X) = \frac{1}{2} d_0 X + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} d_i \sigma_i X \sigma_i, \quad d_0 + \sum_{i=1}^{3} d_i = 2, \tag{38}$$

gdzie σ_i są macierzami Paullego:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

W takim przypadku wartości własne (być może zdegenerowane) można wyznaczyć analitycznie[13]. Są to liczby: $1, \frac{1}{2}(d_0 - d_3 + d_1 - d_2), \frac{1}{2}(d_0 - d_3 - d_1 + d_2), \frac{1}{2}(d_0 + d_3 - d_1 - d_2)$, zatem jest to dobry przykład do testowania oszacowania (36). Poniżej podano zestawienie dokładnej wartości $|\lambda_2|$ oraz prawej strony oszacowania (36) dla kilku losowych wartości d_0, d_1, d_2, d_3:

[12] W. Bruzda, V. Cappellini, H.-J. Sommers, K. Życzkowski, *Random Quantum Operations*, "Phys. Lett. A" 2009, No. 373, s. 320–324; M. Horvat, *The Ensemble of Random Markov Matrices*, "J. Stat. Mech." 2009, P07005.

[13] I. Bengtsson, K. Życzkowski, op. cit.

$d_{0,}\ d_{1,}\ d_2,\ d_3$	$\vert\lambda_2\vert$	$1 - \min d_i$
0,68; 0,12, 0,63, 0,57	0,31	0,88
0,85; 0,35; 0,55; 0,25	0,4	0,75
1,25; 0,51; 0,18; 0,06	0,76	0,94
1,0; 0,62; 0,24; 0,14	0,62	0,86

Podsumowanie

W niniejszym artykule pokazaliśmy, jak wykorzystując proste twierdzenie z teorii macierzy, możemy znaleźć oszacowanie drugiej wartości własnej bardziej skomplikowanych obiektów, jakimi są kanały kwantowe. Wynik ma zastosowanie w określaniu szybkości zbieżności powtarzanej wielokrotnie dyskretnej ewolucji układu kwantowego, opisywanej danym kanałem kwantowym.

ESTIMATION OF THE SECOND LARGEST EIGENVALUE OF THE QUANTUM CHANNEL

ABSTRACT

In theory of quantum information, discrete evolution of an open quantum system is described by a quantum channel – in finite dimensional space every channel has fixed point, and can be represented as a matrix with spectral radius equal 1. If the eigenvalue 1 is nondegenerate, then for every initial state multiple action of a channel converges to this unique fixed point exponentially fast. The rate of convergence is given by the eigenvalue λ_2 with the largest modulus not bigger then 1. In this paper we derive an upper-bound for this eigenvalue using the Brauer theorem known from the matrix theory.

KEYWORDS

quantum map, density matrix, asymptotic evolution

BIBLIOGRAFIA

1. Bengtsson I., Życzkowski K., *Geometry of Quantum States*, Cambridge University Press, Cambridge 2006.
2. Białończyk M., Jamiołkowski A., Życzkowski K., *Spectral and Structural Properties of Quantum Maps and Algebra Generated by Their Kraus Operators*, arXiv 1711.02354.v1 [math-ph] 2017.

3. Bruzda W., Cappellini V., Sommers H.-J., Życzkowski K., *Random Quantum Operations*, "Phys. Lett. A" 2009, No. 373, s. 320–324.
4. Choi M. D., *Completely Positive Linear Maps on Complex Matrices*, "Linear. Alg. Appl." 1975, No. 10, s. 285–290.
5. Cirac J. I., Perez-Garcia D., Sanz M., Wolf M. M., *A Quantum Version of Wielandt's Inequality*, "IEEE Trans. Inf. Theory" 2010, No. 56, s. 4668–4673.
6. Evans D., Høegh-Krohn R., *Spectral Properties of Positive Maps On C*-algebras*, "J. London Math. Soc." 1978, No. 17, s. 345–355.
7. Farenick D. R., *Irreducible Positive Linear Maps On Operator Algebras*, "Proc. AMS" 1996, No. 124, s. 3381.
8. Frobenius G., *Ueber Matrizen aus nicht negativen Elementen*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1912.
9. Groh U., *The Peripheral Point Spectrum of Schwarz Operators On C*-algebras*, "Math. Z." 1981, No. 176, s. 311–318.
10. Horn R. A., Johnson C. R., *Matrix Analysis*, Cambridge University Press 1985.
11. Horvat M., *The Ensemble of Random Markov Matrices*, "J. Stat. Mech." 2009, P07005.
12. Jamiołkowski A., *Linear Transformations which Preserve Trace and Positive-semidefiniteness of Operators*, "Rep. Math. Phys." 1972, No. 5, s. 415.
13. Lagro M., Yang W-S., Xiong S., *A Perron-Frobenius Type of Theorem for Quantum Operations*, "J. Stat. Phys." 2017, No. 169, s. 38–62.
14. Paulsen V., *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge 2002.
15. Rahaman M., *Multiplicative Properties of Quantum Channels*, arXiv:1701.06205, July 2017.
16. Szehr O., Reeb D., Wolf M. M., *Spectral Convergence Bounds for Classical and Quantum Markov Processes*, "Journal-ref: Comm. Math. Phys." 2015, No. 333, s. 565–595.