ZESZYTY NAUKOWE TOWARZYSTWA DOKTORANTÓW UJ
NAUKI ŚCISŁE, NR 16 (1/2018), S. 153–168
E-ISSN 2082-3827 | P-ISSN 2084-977X
WWW.DOKTORANCI.UJ.EDU.PL/ZESZYTY/NAUKI-SCISLE
DOI: 10.12797/ZNTDSC.09.2018.16.01

MARTA EMILIA BIELIŃSKA

UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI
WYDZIAŁ FILOZOFICZNY
E-MAIL: MARTA.E.BIELINSKA@STUDENT.UJ.EDU.PL

DATA NADESŁANIA TEKSTU DO REDAKCJI: 20.11.2017
DATA POZYTYWNEJ RECENZJI: 14.04.2018

Paradoks dychotomii

STRESZCZENIE

Paradoksy Zenona z Elei dotyczące ruchu są tematem żywych debat. Część autorów uważa, iż zostały one rozwiązane, wciąż jednak można usłyszeć głosy mówiące o ich problematycznym charakterze. W tym tekście zostaną przywołane przykładowe rozwiązania z literatury, a spośród nich część zostanie poddana krytyce. Na koniec przywołamy kwantowy efekt Zenona jako interesujący głos w dyskusji i jedną z dróg rozwiązania paradoksu dychotomii.

SŁOWA KLUCZOWE

paradoksy Zenona, dychotomia, nieskończoność, kwantowy efekt Zenona

Wprowadzenie

Jednymi z najstarszych i zarazem żywo dyskutowanych we współczesnej literaturze argumentów odnoszących się do natury czasu i przestrzeni są rozumowania Zenona z Elei. Pojawiają się one jako wciąż aktualny problem nie tylko na gruncie historii filozofii, ale również filozofii czasu i przestrzeni oraz teorii mnogości. Zwyczajowo nazywane są paradoksami, ponieważ stanowią argumentacje za tezami sprzecznymi z codziennym doświadczeniem. Pięć z nich to dowody na niemożność istnienia ruchu, zaś pozostałe zaprzeczają istnieniu wielości. Jednym z paradoksów należących do pierwszej grupy jest tzw. dychotomia. Biorąc za milczącą przesłankę tezę o ciągłym charakterze przestrzeni, Zenon próbuje udowodnić niemożność przemieszczenia się dowolnego ciała z jednego punktu do drugiego.

Patrząc na historię dyskusji na temat paradoksu dychotomii można wyróżnić kilka głównych rodzajów rozwiązań tego problemu. Pierwszy z nich opiera się na zdrowym rozsądku i konfrontacji z empirią – historycznie jest przypisywany cynikom. Znacznie ciekawsze z filozoficznego punktu widzenia zdają się jednak rozwiązania oparte na rozważaniach dotyczących natury pojęć i operacji matematycznych oraz te, które odnoszą się do przestrzeni fizycznej. W tym tekście zostaną przedstawione wybrane historyczne próby rozwiązania paradoksu dychotomii wraz z komentarzem. Na koniec przytoczymy uwagi związane z teorią kwantów – w szczególności zostanie omówione zjawisko fizyczne nazywane kwantowym efektem Zenona. Okaże się, że antyczny paradoks może znaleźć uzasadnienie w kontekście współczesnych teorii fizycznych. Aby jednak dobrze zrozumieć problem związany z naturą argumentów Zenona, należy najpierw poprawnie uchwycić jego motywacje i sposób myślenia. Do tego konieczna jest historyczna analiza poglądów Zenona.

Tło historyczne powstania paradoksu

Choć paradoksy Zenona z Elei są współcześnie rozważane przede wszystkim na gruncie historii nauki czy też filozofii przestrzeni, warto mieć na uwadze motywacje filozofa, które skłoniły go do argumentowania za tak kontrowersyjnymi tezami. Zenon należał do szkoły eleackiej; był uczniem jej czołowego przedstawiciela – Parmenidesa[1]. Tworzona przez nich filozofia stała w zdecydowanej opozycji do ówczesnych poglądów postulujących istnienie przeciwieństw (przede wszystkim krytykowali oni pitagorejczyków, którzy opisywali świat za pomocą dziesięciu par sprzeczności, takich jak prawo-lewo czy męskość-żeńskość[2]; kontrowersyjność poglądów filozofów szkoły eleackiej wywołała liczne dyskusje we współczesnych im czasach – przeciwko jedności bytu argumentowali m.in. Empedokles z Akragas i Anaksagoras z Kladzomen[3]). W poemacie *O naturze* Parmenides opisywał

[1] Do grona eleatów zalicza się Parmenidesa i Zenona z Elei, Melissosa z Samos, czasem również Ksenofanesa oraz „Anonimowego Eleatę" – bohatera dialogu Platona *Parmenides*. Por. A. Preus, *Historical Dictionary of Ancient Greek Philosophy*, The Scarecrow Press, Lanham–Toronto–Plymouth 2007, s. 98. Krótką analizę poglądów Parmenidesa oraz innych filozofów greckich w kontekście zagadnienia bytu można znaleźć w: J. Wojtysiak, *Klasyczne koncepcje bytu. Od Arystotelesa do współczesności*, [w:] *Przewodnik po metafizyce*, red. S. T. Kołodziejczyk, Kraków 2011, s. 45–87.

[2] Por. C. Huffman, *Pythagoreanism*, "The Stanford Encyclopedia of Philosophy", ed. E. N. Zalta, Winter Edition 2016.

[3] Por. *Ancient Philosophy. From 600 BCE to 500 CE*, ed. B. Duignan, Britannica Educational Publishing, New York 2010, s. 24–27.

spotkanie z Mojrą (nazywaną również Koniecznością lub Sprawiedliwością), która objawiła mu, że „to, co jest (*eon*) […] jest niezrodzone i niezniszczalne, albowiem jest całe, nieruchome i wieczne (*ateleston*). Nigdy nie było ono ani nie będzie, gdyż teraz jest od razu wszystkie, jedno i jednolite (*syneches*)"[4]. To właśnie jedność bytu stała się główną tezą rozwijaną przez przedstawicieli szkoły eleackiej. Z niej wywodzili oni rozmaite konsekwencje – na przykład dotyczące ruchu.

Takie poglądy przejął od swojego mistrza Zenon i – jak się wydaje – poszukiwał ich uzasadnienia na gruncie analizy świata przyrodniczego. Kierując się pobudkami metafizycznymi, we wczesnych latach pracy filozoficznej sformułował czterdzieści argumentów przeciw wielości i pięć przeciwko ruchowi[5]. Paradoks dychotomii jest jednym z rozumowań kończących się konkluzją głoszącą, że ruch jest niemożliwy.

Związek między koniecznością bezruchu a jednością bytu postulowaną przez eleatów może być nie do końca oczywisty dla współczesnego czytelnika. W kręgach eleackich to rozumowanie było bardziej naturalne. Można je wytłumaczyć na przykład w następujący sposób: gdyby coś miało się poruszać, to musiałoby jednocześnie być (jeszcze) w jednym miejscu oraz nie być (już) w innym. Natomiast coś, co jednocześnie jest i nie jest, nie może istnieć. Dlatego właśnie ruch jest niemożliwy – jako koniecznie związany ze zmianą, która pociąga za sobą sprzeczność[6].

Możliwe sformułowania paradoksu dychotomii

Dychotomia jako argument przeciwko ruchowi została po raz pierwszy opisana w *Fizyce* Arystotelesa jako jeden z paradoksów Zenona: „Pierwszy mówi, że nie może istnieć ruch, gdyż poruszające się ciało zawsze musi najpierw dotrzeć do środka, zanim osiągnie cel"[7]. Nieco obszerniejszą relację spisał Sympliklios w komentarzu do *Fizyki* Arystotelesa:

---

[4] A. Krokiewicz, *Zarys filozofii greckiej*, Warszawa 2000, s. 151.

[5] Por. ibidem, s. 159. Do dzisiejszych czasów przetrwały tylko dwa argumenty przeciwko wielości oraz wszystkie pięć argumentów przeciw ruchowi. Pisma Zenona nie zachowały się. Jego poglądy są znane z *Komentarza do Fizyki* Symplikliosa, *Parmenidesa* Platona oraz *Fizyki* Arystotelesa.

[6] To rozumowanie jest uproszczeniem myśli Parmenidesa – głównego myśliciela szkoły eleackiej, jednak dobrze oddaje jej główne założenia, które stały się przyczynkiem do sformułowania paradoksów Zenona. Dokładniejszą analizę poglądów eleatów można znaleźć m.in. w tekście P. Curd, *Parmenides and After: Unity and Plurality*, [w:] *A Companion to Ancient Philosophy*, eds. M. L. Gill, P. Pellergin, Blackwell Publishing 2006, s. 34–56.

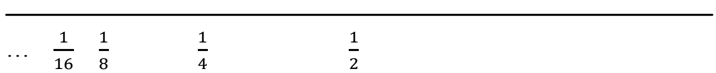
[7] Arystoteles, *Fizyka*, [w:] idem, *Dzieła wszystkie*, t. 2, tłum. K. Leśniak, A. Paciorek, L. Regner, P. Siwek, Warszawa 1990, VI, 9, 239 b.

> […] jeżeli istnieje ruch, to konieczne jest, że poruszające się ciało przebędzie nieskończoną liczbę odcinków w skończonym czasie; to jest jednak niemożliwe: zatem ruch nie istnieje. […] Jeżeli każdy odcinek można dzielić w nieskończoność, wówczas konieczne jest, że poruszające się ciało przebędzie najpierw połowę odcinka, po którym się porusza, potem zaś resztę; jednak zanim przebędzie ono połowę całej drogi, musi najpierw pokonać połowę tej połowy, a wcześniej połowę tej ostatniej. Skoro więc każdy odcinek można dzielić na połowy w nieskończoność, nie jest możliwe, by w skończonym czasie przebyć jakąkolwiek drogę[8].

W literaturze istnieje kilka podstawowych ujęć paradoksu dychotomii:

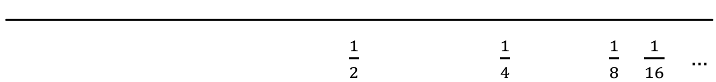
(1) Poruszające się ciało, aby przebyć pewną odległość, musi najpierw przebyć jej połowę. Jednakże w celu pokonania tej połowy drogi musiałoby najpierw pokonać jej połowę. Prowadząc dalej to rozumowanie, można dojść do konkluzji mówiącej, że nigdy nie będzie można wskazać pierwszego, najmniejszego dystansu, który zacząłby ruch – wobec tego rozważany obiekt nigdy się nie poruszy (por. ryc. 1).

Ryc. 1



(2) Ciało, które miałoby przebyć dany dystans, najpierw musiałoby pokonać jego połowę. Gdyby to się udało, to do dokończenia drogi należałoby pokonać połowę pozostałego dystansu. Idąc tym tokiem myślenia należy zauważyć, że nie da się wskazać ostatniego kawałka drogi – zatem ciało nigdy nie dotrze do celu (por. ryc. 2)[9].

Ryc. 2



8 Sympiklios, *On Aristotle's Physics*, [w:] *Space from Zeno to Einstein. Classic Readings with Contemporary Commentary*, ed. N. Huggett, The MIT Press, Cambrigde–London 1999 [tłum. własne].

9 Stanowiska (1) oraz (2) – lub bardzo podobne do nich – są rozważane w tekstach: J. Czerniawski, *Ruch, przestrzeń, czas. Protofizyczne i metafizyczne aspekty podstaw fizyki relatywistycznej*, Kraków 2009; B. Dowden, *Zeno's Paradoxes*, Internet Encyclopedia of Philosophy 2009.

W tych dwóch ujęciach szczególny nacisk kładziony jest na aspekt przestrzenny. Problemem w nich jest niemożność wskazania najkrótszego odcinka drogi, który (1) miałby być pierwszym odcinkiem ruchu albo (2) ostatnim. Często te podejścia określa się mianem regresywnego i progresywnego paradoksu dychotomii[10]. Pierwsze ze sformułowań szczególnie dobrze oddaje zamysł Zenona (przynajmniej w wersji spisanej przez Arystotelesa i Symplikliosa), jednak drugie jest równie popularne w literaturze[11]. Wydaje się, że nie dowodzi ono jednak bezpośrednio całkowitej niemożliwości ruchu, lecz na pierwszy rzut oka wskazuje na pewną jego niepokojącą własność (jaką jest niemożliwość dotarcia do celu), co przypomina bardziej zamysł tkwiący w paradoksie nazywanym zwyczajowo w literaturze „Achilles i żółw"[12]. Lepszymi ujęciami wydają się zatem te, które uwzględniają nie tylko problem przestrzeni, ale również czasu, oddając tym samym główny zamysł Zenona. Można je sformułować analogicznie do regresywnego i progresywnego podejścia (1) oraz (2). Ujęcie (3) będzie uogólnieniem tych pomysłów, ponieważ w jego przypadku sposób podziału nie jest istotny.

(3) Załóżmy, że ciało ma do przebycia jakąś drogę. Podobnie jak w (1) lub (2), można podzielić ją na nieskończenie wiele części, na przykład na połowy. Każda z tych odległości musi zostać pokonana w jakimś czasie. Wobec tego, aby ciało przebyło zadany dystans, musiałoby przebyć nieskończoną ilość odcinków w skończonym czasie, co jest niemożliwe. Zatem ruch nie jest możliwy[13].

---

[10] Por. ibidem oraz N. Huggett N., *Space from Zeno to Einstein. Classics Readings with a Contemporary Commentary*, London–Cambridge 1999, s. 38–39.

[11] Jest na przykład przywołane w tekście P. Lynds, *Zeno's Paradoxes: A Timely Solution*, [online] http://philsci-archive.pitt.edu/1197/1/Zeno_s_Paradoxes_-_A_Timely_Solution.pdf [dostęp: 23.03.2018].

[12] Często przyjmuje się, że dychotomia jest szczególnym przypadkiem paradoksu „Achilles i żółw", w którym Achilles spoczywa (por. B. Dowden, op. cit.). Związek między tymi paradoksami zauważono już w czasach antycznych. Jan Filofon przytacza komentarz anonimowego myśliciela, który mówi, że u podstaw obu rozumowań leży ten sam problem – nieskończone dzielenie danej wielkości, jednak różnią się one sposobem podziału: w pierwszym paradoksie otrzymane części są równe, a w drugim nie. Por. J. Filofon, *On Aristotle Physics 5-8*, [w:] *Philophonus on Aristotle Physics 5-8 with Simplicius on Void*, trans. P. Lettnick, J. O. Urmson, Bloomsbury Academic, London–New Delhi–New York–Sydney 2013.

[13] Podobne podejście pojawia się często w literaturze, zob. K. Ajdukiewicz, *Zmiana i sprzeczność*, Warszawa 1948; M. J. White, *The Continuous and the Discrete. Ancient Physical Theories from a Contemporary Physics*, Clarendon Press, Oxford 1992, s. 168–169.

Istnieją również inne pomysły związane z tym paradoksem. Jednym z ciekawszych sformułowań dychotomii jest następujące rozumowanie:

(4) Czas nigdy nie może upłynąć o zadaną wartość. Gdyby mógł, to najpierw musiałby upłynąć o połowę tej wartości, jak również o połowę nowego przedziału i tak dalej, aż do nieskończoności[14].

Podejścia typu (4) nie będą jednak rozważane w dalszej części tekstu, są bowiem zbyt odległe od oryginalnego problemu. Należy jednak mieć świadomość ich istnienia i po ewentualnym rozwiązaniu paradoksu w standardowych sformułowaniach warto rozważyć również rozmaite argumenty zainspirowane dychotomią.

Próby rozwiązania

Na przestrzeni wieków pojawiały się różne próby rozwiązania paradoksu dychotomii. Wydaje się, że można wyróżnić kilka rodzajów argumentów. Pierwszy z nich to podejście zdroworozsądkowe, odwołujące się do doświadczenia. Innym pomysłem była krytyka rozumowania Zenona przy pomocy narzędzi matematycznych. Myślenie w tym paradygmacie sprowadza dychotomię do rozważań o naturze odcinka oraz odwołuje się do narzędzi obliczeniowych (takich jak suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego). Ostatnim z podejść jest analiza problemu Zenona w przestrzeni fizycznej. Jest ono mało popularne, choć to zapewne właśnie ten paradygmat odzwierciedla pierwotny zamysł filozofa. Myśląc kategoriami fizyki współczesnej, można zapytać o naturę przestrzeni i tym samym odpowiedzieć na pytanie o sensowność paradoksu dychotomii. Dwa pierwsze podejścia pojawią się w analizowanych rozwiązaniach z literatury, zaś trzecie zostanie zaproponowane na końcu tekstu.

Pierwsza próba zmierzenia się z paradoksem dychotomii pochodzi od cyników i może być nazwana zdroworozsądkową. Podobno jeden z nich, usłyszawszy rozumowanie Zenona, nie skomentował go słownie, a jedynie zaczął spacerować na dowód, że ruch jest możliwy[15]. Takie zdroworozsądkowe podejście – choć we współczesnej literaturze często traktowane

---

[14] Pogląd przypisywany Williamowi Jamesowi (zob. P. Lynds, op. cit., s. 2). Podobne ujęcie prezentował Kazimierz Ajdukiewicz w *Zmianie i sprzeczności* (op. cit.).

[15] Według niektórych źródeł był to Diogenes, a według innych – Antystenes. Por. A. Krokiewicz, op. cit., s. 161 oraz Sympliklios, *On Aristotle's Physics 8.1-5*, trans. I. Bodnar, M. Chase, M. Share, Bloomsbury Academic, London–New Delhi–New York–Sydney 2012, 1205, s. 25–26.

jest z politowaniem[16] – zwraca uwagę na kluczową kwestię, jaką jest cel rozważań Zenona. Jak to zostało podkreślone, jego poglądy silnie wpisywały się w szkołę eleacką, której mistrzem był nauczyciel Zenona – Parmenides. Rację wydaje się mieć Adam Krokiewicz, który pisze: „Źródłem argumentów Zenona nie było […] – o ile można sądzić – pragnienie wiedzy o rzeczywistości, lecz przywiązanie do Parmenidesa i chęć wyszydzenia jego przeciwników"[17]. Mając to na uwadze, należy porzucić komentarze dotyczące rozumowania Zenona, w których przypisuje się mu próbę zanegowania istnienia ruchu w przyrodzie możliwego do uchwycenia na drodze empirii, i zastanowić się nad źródłami skonstruowanego przez niego paradoksu. One zaś zdają się tkwić albo w zagadnieniu nieskończoności (przy założeniu continuum punktów składających się na drogę konieczną do przebycia), albo w naturze przestrzeni naszego świata.

Inną bliską chronologicznie Zenonowi odpowiedzią była ta, której udzielił Arystoteles. Zauważył on, że gdy dzielimy dany dystans do przebycia, to powinniśmy dzielić również czas potrzebny na tę podróż[18]. Załóżmy, że ciało pokonuje odległość d=1 w czasie t=1. Wówczas proporcjonalnie – w celu przebycia drogi 0,5 potrzebowałoby czasu o wartości 0,5 i tak dalej. To rozumowanie przedstawia tabela Tab. 1.

Tab. 1

d	1	0,5	0,25	0,125	…
t	1	0,5	0,25	0,125	…

W takim przypadku czas potrzebny na przebycie skończonej drogi również jest skończony. Rozwiązałoby to problem w ujęciu (3), ponieważ widać, iż w skończonym czasie można przebyć tylko skończoną odległość.

[16] Niektórzy autorzy traktowali je jednak całkowicie poważnie. Ajdukiewicz w tekście *Zmiana i sprzeczność* wydaje się chwalić tych, którzy odrzucili drogę Rozumu (ponieważ musieli porzucić zasadę sprzeczności) na rzecz empirii.

[17] A. Krokiewicz, op. cit., s. 166. Przekonanie to podzielali również P. Lynds: "It is doubtful that with his paradoxes, Zeno was attempting to argue that motion was impossible, as is sometimes claimed" (P. Lynds, op. cit.) oraz J. Palmer (*Zeno of Elea*, "The Stanford Encyclopedia of Philosophy" , ed. E. N. Zalta, Spring Edition 2017).

[18] Por. Sympliklios, *On Aristotle's Physics...* op. cit. oraz współczesne komentarze do rozumowania Arystotelesa, np. N. Huggett, *Zeno's Paradoxes*, "The Stanford Encyclopedia of Philosophy", ed. E. N. Zalta, Winter Edition 2010; idem, *Space from Zeno to Einstein...* op. cit., s. 39–44.

Aby udowodnić rozumowanie Arystotelesa, można użyć obserwacji poczynionej przez Archimedesa i sięgnąć do narzędzi matematyki. Przypisuje mu się odkrycie skończoności sumy następującego ciągu: $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots$ wyrażającej się wartością $\frac{1}{3}$. Później sformułowano twierdzenie ostatecznie potwierdzające, iż suma wyrazów nieskończonego ciągu może przyjmować skończoną wartość. Ku takiemu rozwiązaniu skłaniał się również Kazimierz Ajdukiewicz[19]. Był on pewien swojej racji w krytyce paradoksu Zenona:

> Tymczasem od dwustu bodaj lat początkujący studenci matematyki potrafią wykazać błąd, który Zenon w swym rozumowaniu popełnił. [...] Po odrzuceniu tej przesłanki w dowodzie Zenona, który nie mógł pojąć, jak suma nieskończenie wielu członów, z których żaden nie jest zerem, lecz posiada określoną wartość dodatnią, może być skończona — odpada całe jego rozumowanie[20].

Posługując się zatem wzorem znanym nawet początkującym studentom matematyki, na który chętnie powołuje się większość autorów rozwiązań tego paradoksu – na sumę wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego – należy przeprowadzić operację sumowania. Dla przykładu z Tab. 1 wspomniane rozwiązanie będzie przebiegało następująco:

$$t = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

gdzie t oznacza czas potrzebny na przebycie danej drogi. Widać, że dla n podziałów odcinka (drogi) na pół czas ten wyraża się sumą wyrazów ciągu geometrycznego S_n:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

Zauważając, iż iloraz tego szeregu wynosi $\frac{1}{2}$, otrzymujemy:

$$S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

[19] Por. K. Ajdukiewicz, op. cit.
[20] Ibidem, s. 70.

Zatem w podanym przykładzie czas potrzebny do pokonania nieskończonej ilości odcinków drogi (każdy w skończonym czasie) jest również skończony i wynosi 2.

To rozwiązanie budzi jednak wiele wątpliwości już na samym gruncie matematyki. Opisane podejście likwiduje problem nieskończonej ilości odcinków, czyli radzi sobie z podejściem (3), jednak problematyczne pozostaje wciąż sformułowanie (1) oraz (2). Nadal nie można wskazać pierwszego (lub ostatniego) odcinka drogi, zatem nie można go przebyć. Aby zrozumieć, dlaczego wykonane obliczenia wykorzystujące sumę nieskończonej ilości wyrazów ciągu nie pozwalają na pozbycie się tego paradoksu, należy prześledzić wyprowadzenie wspomnianego wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego. Pokrewne obliczenia przedstawia Peter Lynds[21]. Niech S_n będzie sumą wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

$$S_n - \frac{1}{2} S_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$S_n = 2\,(1 - \frac{1}{2^{n+1}})$$

Ostatecznie wynika z tego, że $\lim_{n\to\infty} S_n = 2$. Skoro jest to granica ciągu, to nie można jednoznacznie wskazać ostatniego elementu, bo n dąży do nieskończoności. Nie istnieje zatem ostatni fragment drogi do przebycia, który można by było pokonać. Wobec tego, o ile można uznać, iż to rozwiązanie pozwala na zlikwidowanie paradoksu w postaci (3), o tyle wciąż pozostaje on problematyczny w sensie (1) i (2).

Do podobnych wniosków doszedł również Jan Czerniawski[22]. Przywołuje on sformułowania (1) oraz (2), przychylając się szczególnie do drugiego ujęcia. Zauważa, że sumowanie nieskończonej ilości wyrazów (w tym przypadku ciągu geometrycznego) jest operacją nieskończoną. Taka zaś operacja jest niemożliwa do wykonania dla ograniczonego podmiotu ludzkiego. Pojawia się tutaj zagadnienie nieskończoności aktualnej. Wskazane wyżej rozwiązanie matematyczne sprowadza on do pewnej alternatywy. Zauważa

21 P. Lynds, op. cit., s. 4.

22 Por. J. Czerniawski, op. cit., s. 52.

bowiem, iż w sytuacji odrzucenia przez daną osobę istnienia nieskończoności aktualnej wspomniane rachunki nie są możliwe do wykonania, zatem paradoks pozostaje problemem. Sytuacja jest następująca: albo ktoś uznaje istnienie nieskończoności aktualnej i wówczas rozwiązuje paradoks w sposób wyżej przedstawiony, albo dana osoba odrzuca ową nieskończoność i w konsekwencji stwierdza niemożność wykonania sumowania nieskończonej ilości wyrażeń. W drugim przypadku dychotomia wciąż jest paradoksalna[23].

Wszystkie te problemy można rozwiązać, stwierdzając niemożność podzielenia przestrzeni nieskończoną ilość razy. Ciągłość przestrzeni jest zatem milczącym założeniem, stojącym u podstaw wszystkich paradoksów Zenona. Wobec tego kolejnym problemem związanym z paradoksem dychotomii jest pytanie o ciągłość przestrzeni świata, w którym żyjemy. Gdyby udało się w sposób jednoznaczny określić naturę przestrzeni jako dyskretną, paradoks zostałby rozwiązany. Okazałoby się wówczas, że istnieje skończona liczba kroków potrzebnych do przebycia drogi, a zatem możliwe byłoby wskazanie pierwszego oraz ostatniego odcinka przebytego przez ciało. Wszystkie problematyczne kwestie związane z paradoksem byłyby w takim wypadku nieaktualne bądź rozwiązane.

Paradoksy Zenona w rzeczywistości kwantowej

Ostatnim wyróżnionym tutaj typem odpowiedzi na paradoks dychotomii jest tzw. ujęcie fizyczne, czyli dotyczące przestrzeni świata. Jest ono o tyle istotne, że wydaje się najbliższe pierwotnym zamiarom Zenona, który tworzył swoje argumenty z myślą o negacji ruchu w fizykalnej rzeczywistości. Warto zatem dodać do tej dyskusji głos zaczerpnięty ze współczesnej fizyki, podający w wątpliwość ciągłość przestrzeni oraz zwracający uwagę na szczególne zachowanie obserwowanej materii.

W paradoksie dychotomii domniemany ruch może zostać odnotowany jedynie podczas aktu obserwacji. W skali klasycznej rozróżnienie między zaistnieniem przemieszczenia a zaobserwowaniem go nie jest konieczne, gdyż przy tych rozmiarach pomiar nie wpływa na stan układu. Jednakże w paradoksie docelowo operuje się na dowolnie małych wielkościach. Nie można zatem zignorować problematyki obserwacji odległości w skali Plancka. Wobec tego pierwszym zagadnieniem, jakie należy zbadać, jest

[23] Dokładniej mówiąc, gdy ktoś uznaje nieskończoność aktualną, to paradoks w sformułowaniu (3) jest rozwiązany, jednak wciąż pozostaje problemem jako (1) oraz (2). W przypadku odrzucenia tego rodzaju nieskończoności paradoks pozostaje nierozwiązany we wszystkich tych sensach.

możliwość wykonywania pomiarów na nieskończenie małych odległościach – czyli takich, do których dochodzi się przez dzielenie drogi na połówki w paradoksie dychotomii.

W 1931 roku fizycy Lew Landau i Rudolf Peierls opublikowali artykuł[24], w którym zasugerowali, iż zasada nieoznaczoności Heisenberga zastosowana do pola elektromagnetycznego uniemożliwia dokonanie pomiaru jakiegokolwiek składnika tego pola z dowolnie dużą dokładnością w zadanym punkcie czasoprzestrzeni. W odpowiedzi na tę publikację Niels Bohr wraz z Léonem Rosenfeldem przeprowadzili badania i opublikowali wyniki, które obaliły teorię Landaua. Jednakże kilka lat później jego uczeń Matevi Bronstein wykazał, że intuicje nauczyciela były prawidłowe. Aby udowodnić niemożliwość wykonania pomiaru na dowolnie małym fragmencie pola, należało posłużyć się polem nie elektromagnetycznym, lecz grawitacyjnym. Jego heurystyczne wyprowadzenie można nakreślić następująco[25].

Niech *x* będzie lokalizacją, w której chcemy zmierzyć wartość pola, zaś *L* dokładnością, z jaką wyznaczymy wspomniane miejsce. Aby przeprowadzić pomiar w miejscu *x*, należy umieścić tam cząstkę. Zgodnie z wcześniejszą definicją *L* należy wybrać: $\Delta x \leq L$. Z zasady nieoznaczoności Heisenberga otrzymujemy: $\Delta x * \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$. Wiadomo, że $p^2 \geq (\Delta p)^2$, gdzie p oznacza średnią wartość pędu. Ponadto $L\Delta p \geq \Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$. Wobec tego $p^2 \geq (\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4\,L^2}$. Ponadto, ze szczególnej teorii względności wiadomo, że $E^2 = p^2c^2$. Z dwóch ostatnich nierówności wynika, że $E^2 \geq \frac{\hbar^2 c^2}{4L^2}$. Po uwzględnieniu $E = mc^2$ otrzymujemy (*) $m^2 \geq \frac{\hbar^2}{4L^2c^2}$. Ostatnia nierówność pociąga za sobą zależność $L \sim \frac{1}{m}$. Oznacza to, iż przy dowolnie niewielkim L masa cząstki stanie się dowolnie duża.

W momencie zgromadzenia bardzo dużej masy w małej objętości cząstka znika pod swoim własnym mikrohoryzontem zdarzeń – powstaje czarna dziura. W tej sytuacji istnieje ryzyko, że przy bardzo niewielkim *L* cząstka znajdzie się w niej i wszelki pomiar stanie się niemożliwy. Aby taka sytuacja nie zaistniała, konieczny jest warunek uwzględniający promień Schwarzschilda: $L \geq \frac{2Gm}{c^2}$, skąd i z (*) otrzymujemy $(\frac{Lc^2}{2G})^2 \geq m^2 \geq \frac{\hbar^2}{4L^2c^2}$. Po kilku

[24] Mowa o tekście L. Landau, R. Peierls, *Erweiterung des Unbestimmheitsprinzips fur die relativistische Quantentheorie*, "Zeitschrift fur Physik" 1931, No. 69, s. 56–69.

[25] Ten fragment został opracowany na podstawie: C. Rovelli, F. Vidotto, *Covariant Loop Quantum Gravity. An Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory*, Cambridge 2015, s. 6–8.

przekształceniach dochodzimy do postaci $L^2 \geq \frac{2G\hbar}{c^3}$. Po wyciągnięciu pierwiastka kwadratowego wyrażenie po prawej stronie nierówności przyjmuje wartość długości Plancka: $L \geq \sqrt[2]{\frac{2G\hbar}{c^3}}$.

Wobec powyższego rozumowania widać, że w kwantowym ujęciu problematyka paradoksów ulega zmianie. Odległość można poznać jedynie przez obserwację. Jednakże z biegiem czasu dystans ulega zmniejszeniu i zbliża się do minimalnej wartości L_{min}. W pewnym momencie, gdy osiąga on wartość $\sqrt[2]{\frac{2G\hbar}{c^3}}$, dalszy pomiar staje się niemożliwy. Wobec tego dla obserwatora paradoks kończy się, gdy ciało rozważane w „dychotomii" może przebyć najmniejszą obserwowalną długość o wartości L_{min}. Pytanie o podział drogi w nieskończoność traci sens.

Okazuje się, że problem stanowi nie tylko skala obserwowanych obiektów, ale również częstotliwość pomiarów. Wiadomo, że w rzeczywistości klasycznej obserwacja nie zmienia układu. Jednakże w przypadku bardzo małych odległości pojawia się nowe zjawisko. Kwantowy efekt Zenona w ogólności można opisać jako spowolnienie ewolucji układu kwantowego w wyniku częstego wykonywania na nim pomiarów. Jest on konsekwencją własności wynikających z równania Schrödingera[26]. W granicznej sytuacji – przy nieskończenie częstych pomiarach – można się spodziewać, że badany układ całkowicie przestanie ewoluować. Ten efekt przewidział już Alan Turing, jednak został on nazwany i dokładnie opisany dopiero w 1977 roku w artykule Baidyanatha Misry oraz George'a Sudarshana[27]. Od tamtej pory to zagadnienie jest żywo dyskutowane w literaturze – zarówno na gruncie teoretycznym, jak i doświadczalnym[28].

Rozumowanie stojące za kwantowym efektem Zenona można opisać najprościej w następujący sposób[29]. Niech $|\phi, 0\rangle$ będzie stanem początkowym układu, zaś H niech oznacza hamiltonian. Wówczas wiadomo, że po czasie t stan układu zmieni się do postaci

---

[26] Por. P. Facchi, S. Pascazio, *Quantum Zeno Dynamics: Mathematical and Physical Aspects*, "Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical" 2008, No. 49 (41), s. 5.

[27] B. Misra, E. C. G. Sudarshan, *The Zeno's Paradox in Quantum Theory*, "J. Math. Phys." 1977, No. 18 (4), s. 756–763.

[28] Obszerny przegląd literatury na ten temat można znaleźć w tekście P. Facchi, S. Pascazio, op. cit., s. 7–8.

[29] Ten opis kwantowego efektu Zenona został zaczerpnięty z tekstu Z. Silagadze, *Zeno Meets Modern Science*, "Acta Physica Polonica" 2005, B 36, s. 6. Por. A. Peres, *Zeno Paradox in Quantum Theory*, "Am. J. Phys." 1980, No. 48, s. 931–932; P. Facchi, S. Pascazio, op. cit., s. 9–10.

$$|\phi, t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\phi, 0\rangle \approx \left(1 - \frac{i}{\hbar}Ht - \frac{1}{2\hbar^2}H^2t^2\right)|\phi, 0\rangle$$

przy założeniu, że t jest niewielkie, zaś hamiltonian nie zależy od czasu. Prawdopodobieństwo, że stan początkowy nie uległ zmianie, wynosi

$$|\langle\phi, 0|\phi, t\rangle|^2 \approx 1 - \frac{(\Delta E)^2}{\hbar^2}t^2$$

gdzie $(\Delta E)^2 = \langle\phi, 0|H^2|\phi, 0\rangle - \langle\phi, 0|H|\phi, 0\rangle$ jest dodatnie. Jeżeli pomiar zostanie wykonany n razy, to prawdopodobieństwo, że w każdym czasie układ będzie w stanie początkowym, wynosi $(1 - \frac{(\Delta E)^2}{\hbar^2}\frac{t^2}{n^2})^n$. Wobec tego dla liczby pomiarów $n \to \infty$ prawdopodobieństwo to zmierza do 1. Oznacza to, że przy bardzo częstych pomiarach układ będzie pozostawał cały czas w stanie początkowym (z bardzo dużym prawdopodobieństwem). Kwantowy efekt Zenona doczekał się również potwierdzeń doświadczalnych. W pierwszym z nich, pochodzącym z 1989 roku, zbadano około 5000 jonów berylu $^9Be^+$ zamkniętych w pułapce jonowej, które były wzbudzane[30]. Okazało się, że wraz ze zwiększaniem częstotliwości ich pomiarów przejścia jonów między stanami zachodziły rzadziej. W innym eksperymencie wykorzystano układ niestabilny – badano ultrazimne atomy sodu uwięzione w przyspieszającej optycznej soczewce, które ulegały tunelowaniu[31]. Zaobserwowano wówczas zarówno kwantowy efekt Zenona, jak i kwantowy antyefekt Zenona (polegający na przyspieszeniu ewolucji układu przez spowolnienie obserwacji). Od tamtej pory wykonano wiele innych eksperymentów, których wyniki były zgodne z przewidywaniami kwantowego efektu Zenona[32].

Kwantowy efekt Zenona można powiązać z paradoksem dychotomii. Jest to szczególnie dobrze widoczne w sformułowaniu (3). Skoro każda z odległości pokonywanych przez ciało jest związana z jakimś przedziałem czasu, to w granicznej sytuacji – gdy rozważane odcinki staną się bardzo małe – częstotliwość pomiarów wzrośnie do tego stopnia, że ewolucja układu zo-

[30] M. I. Wayne, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger, D. J. Wineland, *Quantum Zeno Effect*, "Phys. Rev. A" 1990, No. 41, s. 2295–2300.

[31] M. Fischer, B. Gutiérrez-Medina, M. Raizen, *Observation of the Quantum Zeno and Anti-Zeno Effects in an Unstable System*, "Physical Review Letters" 2001, No. 87 (4).

[32] Część literatury opisującej próby eksperymentalnego potwierdzenia kwantowego efektu Zenona można znaleźć w tekście P. Facchi, S. Pascazio, op. cit., s. 7–8.

stanie zatrzymana. Ciało przestanie się poruszać[33]. To samo rozumowanie można zastosować do ujęć (1) i (2). W ich przypadku rozważanie o czasie nie pojawia się wprawdzie *explicite*, jednak przy wykonywaniu pomiarów po przebyciu każdego odcinka drogi efekt będzie ten sam: układ przestanie, jak w (2), lub nigdy nie zacznie, jak w (1) – ewoluować.

Z kwantowego punktu widzenia widać, iż pytanie o długości mniejsze niż L_{min} nie ma empirycznego sensu. Nie można zaobserwować nieskończonej ilości ruchów – zgodnie z paradoksem – potrzebnych do przebycia odcinka o skończonej długości. Nie rozstrzyga to oczywiście o prawdziwości lub fałszywości rozumowania Zenona, wskazuje jednak na brak empirycznego dostępu do odpowiedzi na pytanie o słuszność paradoksu dychotomii. Ciekawsze rozważania wynikające z mechaniki kwantowej są związane z kwantowym efektem Zenona. Zakładając, że ciało opisywane w paradoksie dychotomii jest obserwowane, okazuje się, iż w pewnym momencie dojdzie do zatrzymania ewolucji układu. Takie rozważania w kontekście antycznych paradoksów są uzasadnione, jako że ich twórca zdawał się orzekać o przestrzeni fizycznej naszego świata. Co więcej, jego rozumowania dotykają zagadnienia wielkości (np. długości) zmierzających do zera, zatem badanie ich formalizmem mechaniki kwantowej wydaje się uzasadnione.

Podsumowanie

Paradoks Zenona doczekał się licznych prób rozwiązania, odwołujących się do różnych dziedzin naukowych i filozoficznych. Najbardziej adekwatnym podejściem wydaje się to, które odwołuje się do fizyki naszego świata. W tym przypadku pojawia się pytanie o faktyczną możliwość dokonywania nieskończonego podziału drogi, którą ma przebyć ciało. Nie sposób zignorować w tym miejscu odkryć współczesnej fizyki. Jeżeli paradoksy zostaną przeformułowane w sposób uwzględniający konieczność istnienia obserwatora dokonującego pomiaru rozważanej odległości, to pytanie o odległości mniejsze niż $\sqrt[2]{\frac{2G\hbar}{c^3}}$ nie ma fizycznego sensu. Dzieląc zatem drogę pokonywaną przez strzałę na połowy, w pewnym momencie dojdzie się do wartości granicznej i paradoks przestanie mieć sens. Interesujące są również konsekwencje kwantowego efektu Zenona. Choć są one sprzeczne z intuicją, potwierdzają tezy Eleaty. Jest to zaskakujący rezultat, który podważa długą tradycję konstatacji paradoksów Zenona z różnych punktów widzenia, częściowo przytoczoną we wcześniejszej części tego tekstu.

[33] Por. Z. K. Sliagadze, op. cit., s. 6.

Nie należy traktować tych rozważań jako ostatecznego rozstrzygnięcia paradoksu Zenona. Jak to było wielokrotnie podkreślane, wydaje się, że jego celem nie było odrzucenie istnienia ruchu w świecie, a jedynie chęć wsparcia poglądów Parmenidesa i wskazania możliwości skonstruowania różnych paradoksów, które miałyby za podstawę założenie o ciągłości przestrzeni. Warto również mieć na uwadze, iż najnowsze teorie fizyki mogą okazać się błędne. Ostatecznie zatem dychotomię wciąż można traktować jako pretekst do podejmowania ciekawych rozważań o strukturze przestrzeni naszego świata oraz naturze matematycznych bytów (na przykład nieskończoności) lub obliczeń. W dalszych badaniach warto rozważyć również inne sformułowania tego paradoksu, na przykład (4), mniej związane z pierwotnym zamysłem Zenona, odwołujące się przede wszystkim do czasu.

DICHOTOMY PARADOX

ABSTRACT

Zenon's Paradoxes about the motion are issue that generate heated debates up to today. Some of the authors claims that that paradoxes are solved, but there are also few of them who maintain that there still remain problematic. In this article there will be recalled exemplary solutions from the literature. Part of them will be criticized. Finally there will be recalled quantum Zeno's effect – as an important message in the debate and one of the ways of solving Dichotomy paradox.

KEYWORDS

Zeno's paradoxes, Dichotomy, infinity, quantum Zeno effect

BIBLIOGRAFIA

1. Ajdukiewicz K., *Zmiana i sprzeczność*, Warszawa 1948.
2. Arystoteles, *Fizyka*, [w:] idem, *Dzieła wszystkie*, t. 2, tłum. K. Leśniak, A. Paciorek, L. Regner, P. Siwek, Warszawa 1990.
3. Curd P., *Parmenides and After: Unity and Plurality*, [w:] *A Companion to Ancient Philosophy*, eds. M. L. Gill, P. Pellergin, Blackwell Publishing 2006, s. 34–56.
4. Czerniawski J., *Ruch, przestrzeń, czas. Protofizyczne i metafizyczne aspekty podstaw fizyki relatywistycznej*, Kraków 2009.
5. Dowden B., *Zeno's Paradoxes*, Internet Encyclopedia of Philosophy 2009.
6. Duignan B., *Ancient Philosophy. From 600 BCE to 500 CE*, Britannica Educational Publishing, New York 2010, s. 24–27.
7. Facchi P., Pascazio S., *Quantum Zeno Dynamics: Mathematical and Physical Aspects*, "Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical" 2008, No. 49 (41).

8. Filofon J., *On Aristotle Physics 5-8*, [w:] *Philophonus on Aristotle Physics 5-8 with Simplicius on Void*, trans. P. Lettnick, J. O. Urmson, Bloomsbury Academic, London–New Delhi–New York–Sydney 2013, s. 19–137.
9. Fischer, M., Gutiérrez-Medina, B., Raizen, M., *Observation of the Quantum Zeno and Anti-Zeno Effects in an Unstable System*, "Physical Review Letters" 2001, No. 87 (4).
10. Huffman C., *Pythagoreanism*, "The Stanford Encyclopedia of Philosophy", ed. E. N. Zalta, Winter Edition 2016.
11. Huggett N., *Zeno's Paradoxes*, "The Stanford Encyclopedia of Philosophy", ed. E. N. Zalta, Winter Edition 2010.
12. Huggett N., *Space from Zeno to Einstein. Classics Readings with a Contemporary Commentary*, London–Cambridge 1999.
13. Krokiewicz A., *Zarys filozofii greckiej*, Warszawa 2000.
14. Landau L., Peierls R., *Erweiterung des Unbestimmheitsprinzips fur die relativistische Quantentheorie*, "Zeitschrift fur Physik" 1931, No. 69, s. 56–69.
15. Lynds P., *Zeno's Paradoxes: A Timely Solution*, [online] http://philsci-archive.pitt.edu/1197/1/Zeno_s_Paradoxes_-_A_Timely_Solution.pdf [dostęp: 23.03.2018].
16. Misra B., Sudarshan E. C. G., *The Zeno's Paradox in Quantum Theory*, "J. Math. Phys." 1977, No. 18 (4), s. 756–763.
17. Palmer J., *Zeno of Elea*, "The Stanford Encyclopedia of Philosophy" , ed. E. N. Zalta, Spring Edition 2017.
18. Peres A., *Zeno Paradox in Quantum Theory*, "Am. J. Phys." 1980, No. 48, s. 931–932.
19. Preus A., *Historical Dictionary of Ancient Greek Philosophy*, The Scarecrow Press, Lanham–Toronto–Plymouth 2007.
20. Rovelli C., Vidotto F., *Covariant Loop Quantum Gravity. An Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory*, Cambridge 2015.
21. Silagadze Z., *Zeno Meets Modern Science*, "Acta Physica Polonica" 2005, B 36, s. 2886–2930.
22. Sympliklios, *On Aristotle's Physics*, [w:] *Readings in Ancient Greek Philosophy From Thales to Aristotle*, eds. S. M. Cohen, P. Curd, C. D. C. Reeve, Hackett Publishing Co. Inc., Indianapolis–Cambridge 1995, s. 58–59.
23. Sympliklios, *On Aristotle's Physics 8.1-5*, trans. I. Bodnar, M. Chase, M. Share, Bloomsbury Academic, London–New Delhi–New York–Sydney 2012.
24. Sympiklios, *On Aristotle's Physics*, [w:] *Space from Zeno to Einstein. Classic Readings with Contemporary Commentary*, ed. N. Huggett, The MIT Press, Cambrigde–London 1999.
25. Wayne M. I., Heinzen D. J., Bollinger J. J., Wineland D. J., *Quantum Zeno Effect*, "Phys. Rev. A" 1990, No. 41, s. 2295–2300.
26. White M. J., *The Continuous and the Discrete. Ancient Physical Theories from a Contemporary Physics*, Clarendon Press, Oxford 1992.
27. Wojtysiak J., *Klasyczne koncepcje bytu. Od Arystotelesa do współczesności*, [w:] *Przewodnik po metafizyce*, red. S. T. Kołodziejczyk, Kraków 2011, s. 45–87.